

**УДК 62-752+62-755 : 621.634**

**Г.Б. ФИЛИМОНИХИН**, докт. техн. наук, проф., КНТУ, Кировоград,  
**В.В. ГОНЧАРОВ**, канд. физ.-мат. наук, доц., КНТУ, Кировоград

### **УСТОЙЧИВОСТЬ ОСНОВНЫХ ДВИЖЕНИЙ СИСТЕМЫ РОТОР – КОРПУС НА ПОДАТЛИВЫХ ОПОРАХ – АВТОБАЛАНСИР: ПОЛУЧЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ**

Ставиться задача про дослідження стійкості основних рухів роторної системи за узагальненими координатами ротора і сумарному дисбалансу ротора і автобалансира. Отримано безрозмірні диференціальні рівняння збуреного руху в рухомій системі координат. Записано характеристичне рівняння.

**Ключові слова:** ротор, дисбаланс, автобалансир, основний рух, стійкість.

Ставится задача об исследовании устойчивости основных движений роторной системы по обобщенным координатам ротора и суммарному дисбалансу ротора и автобалансира. Получены безразмерные дифференциальные уравнения возмущенного движения в подвижной системе координат. Составлено характеристическое уравнение.

**Ключевые слова:** ротор, дисбаланс, автобалансир, основное движение, устойчивость.

The task of investigating is the stability of the basic movements of the rotor system of generalized coordinates of the rotor and the total imbalance of the rotor and the auto-balancer. The dimensionless differential equations of perturbed motion in the moving coordinate system was obtained. The characteristic equation was composed.

**Keywords:** rotor, imbalance, autobalancer, main motion, stability.

#### **Вступление**

В [1] приведены работы, в которых используются разные подходы при составлении дифференциальных уравнений движения роторных систем с автобалансирами (АБ), и разработан новый метод получения упрощенных дифференциальных уравнений движения таких роторных систем, базирующийся на предположениях о малости линейных и угловых отклонений продольной оси ротора, и о малости массы дисбаланса и корригирующих грузов (КГ) по отношению к массе роторной системы. На базе предложенного метода получена математическая модель системы, состоящей из тяжелого корпуса на вязкоупругих опорах и размещенного в нем статически неуравновешенного ротора с шаровым АБ.

Цель работы – постановка задачи об исследовании устойчивости основных движений системы ротор – корпус на податливых опорах – автобалансир. Устойчивость исследуется по обобщенным координатам ротора и суммарному дисбалансу ротора и автобалансира. На основных движениях они равны нулю.

Для исследования устойчивости получены дифференциальные уравнения возмущенного движения в действительной и комплексной формах. Они приведены к безразмерному виду и записаны в подвижной системе координат. Получено характеристическое уравнение.

## 1. Описание теоретико-механической модели ротора и АБ

Осесимметричный ротор насажен на жесткий вал, масса которого отнесена к массе ротора. Ротор установлен в массивный корпус с возможностью вращения вокруг вала (рис. 1). Корпус удерживают пять вязкоупругих (предварительно недеформированных) опор. Общая масса ротора  $m_p$ , масса корпуса  $M_k$ .

Центр масс ротора и массивного корпуса совпадают и находятся в точке  $O$ . Составляющая  $\omega$  скорости вращения ротора вокруг вала является постоянной.

Упругие свойства опор характеризуют коэффициенты жесткости  $k_{Lx}, k_{Ly}, k_{Lz}, k_{Rx}, k_{Ry}$ , а вязкие – коэффициенты вязкости  $b_{Lx}, b_{Ly}, b_{Lz}, b_{Rx}, b_{Ry}$ . В плоскости  $z = d$  находится статический дисбаланс  $s$ , образованный точечной массой  $m_0$ , которая находится на расстоянии  $r_0$  от продольной оси ротора.

Неподвижные оси  $Oxyz$  введены для положения статического равновесия системы: ось  $Oz$  направлена по продольной оси ротора, оси  $Ox, Oy$  направлены параллельно направлениям вязкоупругих опор, перпендикулярных оси вращения, так, что тройка осей  $Oxyz$  – правая. Подвижные оси  $Ouvw$  жестко связаны с корпусом, а  $O\xi\eta\zeta$  – с ротором. В исходном положении роторной системы все три системы осей совпадают (рис. 1).

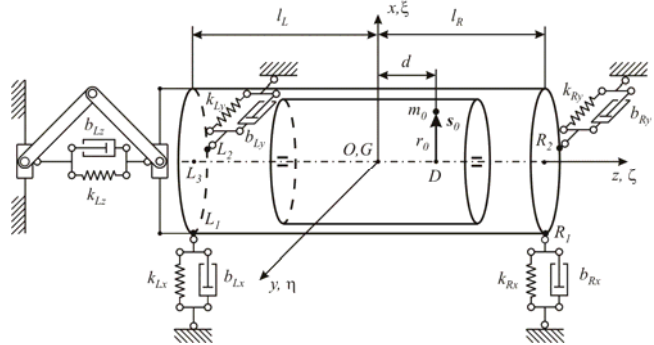


Рис. 1. Ротор в массивном корпусе, установленном на вязкоупругих опорах

Относительно осей  $Ouvw$  ротор и корпус имеют тензоры инерции

$$\mathbf{J}_p = \text{Diag}(A_p, A_p, C_p), \quad \mathbf{J}_k = \text{Diag}(A_k, A_k, C_k), \quad (1.1)$$

а радиус-векторы точек приложения опор имеют вид

$$\mathbf{r}_{L_1} = \begin{pmatrix} x_{L_1} \\ 0 \\ z_{L_1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_{L_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ y_{L_2} \\ z_{L_2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_{L_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z_{L_3} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_{R_1} = \begin{pmatrix} x_{R_1} \\ 0 \\ z_{R_1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_{R_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ y_{R_2} \\ z_{R_2} \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

Модель движения ротора с массивным корпусом и дисбалансом приведена на рис. 2. Вначале

происходит поступательное

движение ротора с корпусом вместе с точкой  $G$  в положение  $(x_G, y_G, z_G)$ , после

которого система

координат  $G\xi\eta\zeta$  занимает промежуточное положение  $Gx_Gy_Gz_G$  (рис. 2, а). Потом происходят повороты ротора с корпусом вокруг точки  $G$  на углы Резаля  $\alpha$  и  $\beta$  (рис. 2, б), после чего оси системы  $Gx_Gy_Gz_G$  переходят в оси –  $Guv\zeta$ . Последним происходит поворот ротора вокруг продольной оси  $\zeta$  на угол  $\omega t$  (рис. 2, в) и оси

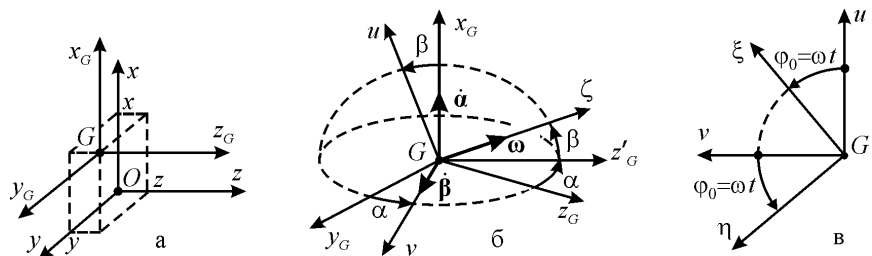


Рис. 2. Кинематика движения ротора и корпуса

системы  $Guv\zeta$  переходят в оси –  $G\xi\eta\zeta$ .

В плоскости  $z = d$  находится АБ, состоящий из  $n$  одинаковых КГ – маятников, шаров или цилиндрических роликов. В маятниковом АБ (рис. 3, а) на вал насажены  $n$  одинаковых маятников каждый массы  $m$  и физической длины  $r$ . В шаровом или роликовом АБ (рис.3, б)  $n$  одинаковых шаров или цилиндрических роликов массы  $m$ , катятся без скольжения по кольцевой дорожке, при этом расстояние от оси ротора до центра шара или ролика равно  $r$ . Как это принято в теории пассивных АБ предполагается, что радиус шаров или роликов намного меньше радиуса их беговой дорожки и КГ не препятствуют движению друг друга.

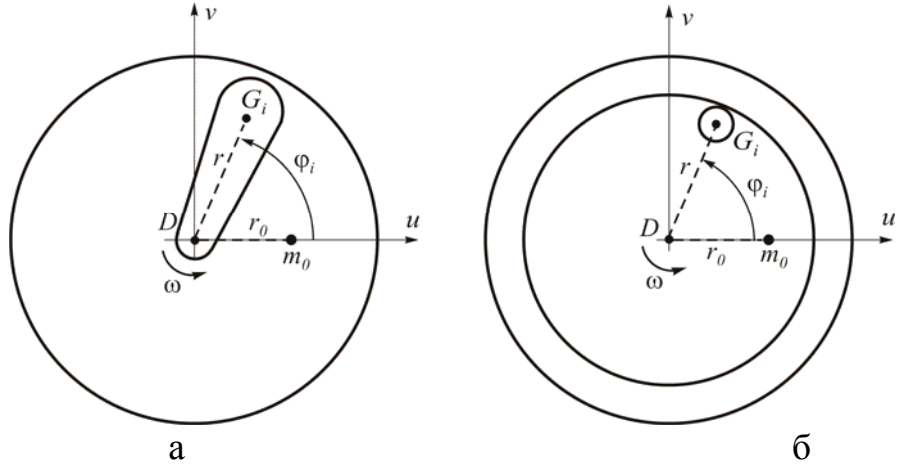


Рис. 3. Кинематика движения  $i$ -того КГ в АБ

Действием силы тяжести пренебрегаем.

При повороте  $i$ -го маятника вокруг оси на него действует момент сил вязкого сопротивления  $br^2(\omega - \dot{\phi}_i)$ , где  $b$  – коэффициент момента сил вязкого сопротивления (приведенный к плечу  $r$ ),  $\omega - \dot{\phi}_i$  – скорость вращения маятника вокруг вала относительно ротора; точка над величинами обозначает производную по времени. При движении  $i$ -того шара или ролика по дорожке на него действует сила вязкого сопротивления  $br(\omega - \dot{\phi}_i)$ , где  $b$  – коэффициент силы вязкого сопротивления, и  $r(\omega - \dot{\phi}_i)$  – скорость движения центра шара или ролика относительно ротора.

## 2. Дифференциальные уравнения, описывающие устойчивость основных движений роторной системы

В работе [1] получена замкнутая относительно неизвестных функций  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $\alpha = \alpha(t)$ ,  $\beta = \beta(t)$ ,  $s_u = s_u(t)$ ,  $s_v = s_v(t)$  ( $s_u$ ,  $s_v$  – проекции суммарного дисбаланса АБ вместе со статическим дисбалансом на соответствующие оси) система дифференциальных уравнений, которая описывает устойчивость основных движений роторной системы в подвижной системе  $Guv\zeta$ . В случае изотропных вязкоупругих опор и одинаковых КГ эта система имеет вид

$$\begin{aligned} M\ddot{x} + b_x\dot{x} + k_x x - b_x \frac{k_{y\alpha}}{k_x} \dot{\beta} - k_{y\alpha} \beta + \ddot{s}_u &= 0, \quad M\ddot{y} + b_y\dot{y} + k_y y + h_x \frac{k_{y\alpha}}{k_x} \dot{\alpha} + k_{y\alpha} \alpha + \ddot{s}_v = 0, \\ A\ddot{\alpha} + b_x \frac{k_\alpha}{k_x} \dot{\alpha} + k_\alpha \alpha + C_p \omega \dot{\beta} + b_x \frac{k_{y\alpha}}{k_x} \dot{y} + k_{y\alpha} y - d\ddot{s}_v &= 0, \\ A\ddot{\alpha} + b_x \frac{k_\alpha}{k_x} \dot{\alpha} + k_\alpha \alpha + C_p \omega \dot{\beta} + b_x \frac{k_{y\alpha}}{k_x} \dot{y} + k_{y\alpha} y - d\ddot{s}_v &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \kappa(\ddot{s}_u + 2\omega\dot{s}_v - \omega^2 s_u) + \frac{b}{m}(\dot{s}_u + \omega s_v) &= -\frac{mn}{2}[a_{Du}(1 - p \cos 2\omega\tilde{t}) - a_{Dv}p \sin 2\omega\tilde{t}], \\ \kappa(\ddot{s}_v - 2\omega\dot{s}_u - \omega^2 s_v) + \frac{b}{m}(\dot{s}_v - \omega s_u) &= \frac{mn}{2}[a_{Du}p \sin 2\omega\tilde{t} - a_{Dv}(1 + p \cos 2\omega\tilde{t})], \end{aligned} \quad (2.1)$$

где

$$\begin{aligned} M &= M_\kappa + m_p, \quad A = A_\kappa + A_p, \quad C = C_p, \quad k_x = k_{Lx} + k_{Rx} = k_{Ly} + k_{Ry} = 2k_0, \\ k_\alpha &= k_{Ly}l_L^2 + k_{Ry}l_R^2 = k_{Lx}l_L^2 + k_{Rx}l_R^2 = k_0(l_L^2 + l_R^2), \\ k_{y\alpha} &= k_{Ly}l_L - k_{Ry}l_R = k_{Lx}l_L - k_{Rx}l_R = k_0(l_L - l_R), \\ b_x &= b_{Lx} + b_{Rx} = b_{Ly} + b_{Ry} = 2b_0, \quad b_\alpha = b_{Ly}l_L^2 + b_{Ry}l_R^2 = b_{Lx}l_L^2 + b_{Rx}l_R^2 = b_0(l_L^2 + l_R^2), \\ b_{y\alpha} &= b_{Lx}l_L - b_{Rx}l_R = b_{Ly}l_L - b_{Ry}l_R = b_0(l_L - l_R), \quad a_{Du} \approx \ddot{x} + d\ddot{\beta}, \quad a_{Dv} \approx \ddot{y} - d\ddot{\alpha}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$s_u = m_0 r_0 \cos \varphi_0 + mr \sum_{i=1}^n \cos \varphi_i, \quad s_v = m_0 r_0 \sin \varphi_0 + mr \sum_{i=1}^n \sin \varphi_i,$$

$$p_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \cos 2\tilde{\psi}_i, \quad p_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sin 2\tilde{\psi}_i, \quad (2.3)$$

$$\kappa = \begin{cases} 7/5, & \text{для шаров,} \\ 3/2, & \text{для цилиндрических роликов,} \\ 1, & \text{для дисбаланса.} \end{cases} \quad (2.4)$$

### 3. Преобразование дифференциальных уравнений движения.

#### 3.1. Запись дифференциальных уравнений в комплексном виде.

Введем комплексные переменные  $X_z, A_z, S_{zu}$ :

$$X_z = x + iy, \quad A_z = \alpha + i\beta, \quad S_{zu} = s_u + is_v. \quad (3.1)$$

Умножим четные уравнения системы (2.1) на мнимую единицу  $i$ , после чего прибавим и вычтем их от соответствующих нечетных уравнений. С учетом (3.1) получим

$$\begin{aligned} L_1 &= M\ddot{X}_z + b_x\dot{X}_z + k_x X_z + ib_x \frac{k_{y\alpha}}{k_x} \dot{A}_z + ik_{y\alpha} A_z + \ddot{S}_{zu} = 0, \quad \bar{L}_1 = 0, \\ L_2 &= A\ddot{A}_z + b_x \frac{k_\alpha}{k_x} \dot{A}_z + k_\alpha A_z - iC_p \omega \dot{A}_z - ib_x \frac{k_{y\alpha}}{k_x} \dot{X}_z - ik_{y\alpha} X_z + id\ddot{S}_{zu} = 0, \quad \bar{L}_2 = 0, \\ L_3 &= \kappa(\ddot{S}_z - 2\omega i\dot{S}_z - \omega^2 S_z) + \frac{b}{m}(\dot{S}_z - \omega i S_z) + \frac{mn}{2}[\ddot{X}_z - id\ddot{A}_z - (\ddot{X}_z + id\ddot{A}_z)pe^{2\omega\tilde{t}i}] = 0, \quad \bar{L}_3 = 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

#### 3.2. Приведение дифференциальных уравнений к безразмерному виду.

Вводим безразмерное время  $\tau$  [2]:

$$\tau = \omega_0 t, \quad \dot{f} = \frac{df}{dt} = \omega_0 \frac{df}{d\tau} = \omega_0 f', \quad \ddot{f} = \frac{d\dot{f}}{dt} = \omega_0 \frac{d(\omega_0 f')}{d\tau} = \omega_0^2 \frac{df'}{d\tau} = \omega_0^2 f''. \quad (3.3)$$

и безразмерные комплексные переменные  $\alpha_z, s_{zu}, x_z$ :

$$\alpha_z = \frac{A_z}{l_\alpha}, \quad s_{zu} = \frac{S_{zu}}{l_s}, \quad x_z = \frac{X_z}{l_x}, \quad (3.4)$$

где  $\omega_0, l_\alpha, l_s, l_x$  – масштабные коэффициенты, которые будут выбраны ниже. Поделив первые два уравнения в (3.2) на  $M\omega_0^2 l_x$ , третье и четвертое на  $A\omega_0^2 l_\alpha$ , а последние два – на  $\kappa\omega_0^2 l_s$ , получим

$$\begin{aligned}
L_1 &= x_z'' + \frac{b_x}{M\omega_0} x_z' + \frac{k_x}{M\omega_0^2} x_z + i \frac{b_x}{M\omega_0} \frac{k_{y\alpha} l_\alpha}{k_x l_x} \alpha_z' + i \frac{k_{y\alpha} l_\alpha}{M\omega_0^2 l_x} \alpha_z + \frac{l_s}{M l_x} s_{zu}'' = 0, \quad \bar{L}_1 = 0, \\
L_2 &= \alpha_z'' + \frac{b_x}{\omega_0} \frac{k_\alpha}{k_x A} \alpha_z' + \frac{k_\alpha}{A\omega_0^2} \alpha_z - i \frac{C_p}{A} \frac{\omega}{\omega_0} \alpha_z' - i \frac{b_x}{\omega_0} \frac{k_{y\alpha} l_x}{k_x A l_\alpha} x_z' - i \frac{k_{y\alpha} l_x}{A\omega_0^2 l_\alpha} x_z + i \frac{l_s d}{A l_\alpha} s_{zu}'' = 0, \quad \bar{L}_2 = 0, \\
L_3 &= s_{zu}'' - 2i \frac{\omega}{\omega_0} s_{zu}' - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} s_{zu} + \frac{b}{m\kappa\omega_0} \left( s_{zu}' - i \frac{\omega}{\omega_0} s_{zu} \right) + \frac{mnl_x}{2\kappa l_s} \left[ x_z'' - i \frac{l_\alpha d}{l_x} \alpha_z'' - \left( \bar{x}_z'' + i \frac{l_\alpha d}{l_x} \bar{\alpha}_z'' \right) pe^{\frac{2\omega}{\omega_0} \tau i} \right] = 0, \quad \bar{L}_3 = 0.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Выбираем неопределенные масштабные коэффициенты  $l_x, l_\alpha$  следующим образом

$$l_x = \frac{l_s}{M}, \quad l_\alpha = \frac{l_s d}{A}, \tag{3.6}$$

и вводим безразмерные параметры и масштабный коэффициент  $\omega_0$

$$\begin{aligned}
\tilde{k}_x &= \frac{k_x}{M\omega_0^2}, \quad \tilde{k}_\alpha = \frac{k_\alpha}{A\omega_0^2}, \quad \tilde{b}_x = \frac{b_x}{M\omega_0}, \quad \tilde{\omega} = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad \tilde{C} = \frac{C_p}{A}, \quad \tilde{b} = \frac{b}{m\kappa\omega_0}, \\
\tilde{k}_{y\alpha} &= \frac{k_{y\alpha}}{M d \omega_0^2}, \quad \tilde{m} = \frac{mn}{2M\kappa}, \quad \tilde{M} = \frac{M d^2}{A}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k_x}{M}}.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Тогда уравнения (3.5) примут вид

$$\begin{aligned}
L_1 &= x_z'' + \tilde{b}_x x_z' + x_z + i \tilde{M} \tilde{k}_{y\alpha} (\tilde{b}_x \alpha_z' + \alpha_z) + s_{zu}'' = 0, \quad \bar{L}_1 = 0, \\
L_2 &= \alpha_z'' + \tilde{k}_\alpha (\tilde{b}_x \alpha_z' + \alpha_z) - i \tilde{\omega} \tilde{C} \alpha_z' - i \tilde{k}_{y\alpha} (\tilde{b}_x x_z' + x_z) + i s_{zu}'' = 0, \quad \bar{L}_2 = 0, \\
L_3 &= \bar{D}^2 s_{zu} + \tilde{b} \bar{D} s_{zu} + \tilde{m} [x_z'' - i \tilde{M} \alpha_z'' - (\bar{x}_z'' + i \tilde{M} \bar{\alpha}_z'') pe^{2\tilde{\omega} \tau i}] = 0, \quad \bar{L}_3 = 0,
\end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\text{где } D x = x' + i \tilde{\omega} x, \quad D^2 x = x'' + 2i \tilde{\omega} x' - \tilde{\omega}^2 x. \tag{3.9}$$

На основных движениях

$$x_z = 0, \quad \alpha_z = 0, \quad s_{zu} = 0 \tag{3.10}$$

и устойчивость можно исследовать по этим комплексным координатам. Система (3.8) нестационарная, поэтому тяжело поддается исследованию.

**3.3. Запись дифференциальных уравнений движения (3.8) в подвижной системе координат  $G\xi\eta\zeta$ .** Сделаем замену переменных

$$\begin{aligned}
x_z &= e^{i\tilde{\omega}\tau} \xi_z, \quad x_z' = e^{i\tilde{\omega}\tau} D \xi_z, \quad x_z'' = e^{i\tilde{\omega}\tau} D^2 \xi_z, \quad \alpha_z = i e^{i\tilde{\omega}\tau} \theta_z, \quad \alpha_z' = i e^{i\tilde{\omega}\tau} D \theta_z, \quad \alpha_z'' = i e^{i\tilde{\omega}\tau} D^2 \theta_z, \\
s_{zu} &= e^{i\tilde{\omega}\tau} \tilde{s}_z, \quad s_{zu}' = e^{i\tilde{\omega}\tau} D \tilde{s}_z, \quad s_{zu}'' = e^{i\tilde{\omega}\tau} D^2 \tilde{s}_z.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Тогда система (3.8) примет вид

$$\begin{aligned}
L_1 &= D^2 \xi_z + \tilde{b}_x D \xi_z + \xi_z - \tilde{M} \tilde{k}_{y\alpha} (\tilde{b}_x D \theta_z + \theta_z) + D^2 \tilde{s}_z = 0, \quad \bar{L}_1 = 0, \\
L_2 &= D^2 \theta_z + (\tilde{k}_\alpha \tilde{b}_x - i \tilde{\omega} \tilde{C}) D \theta_z + \tilde{k}_\alpha \theta_z - \tilde{k}_{y\alpha} (\tilde{b}_x D \xi_z + \xi_z) + D^2 \tilde{s}_z = 0, \quad \bar{L}_2 = 0, \\
L_3 &= s_z'' + \tilde{b} s_z' + \tilde{m} [D^2 \xi_z + \tilde{M} D^2 \theta_z - (\bar{D}^2 \bar{\xi}_z + \tilde{M} \bar{D}^2 \bar{\theta}_z) p] = 0, \quad \bar{L}_3 = 0.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Это система обыкновенных линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами. Заметим, что для таких систем теория устойчивости движений наиболее разработана [3].

На основных движениях (см. (3.10))

$$\xi_z = 0, \quad \theta_z = 0, \quad s_z = 0. \tag{3.13}$$

Будем исследовать устойчивость основных движений (3.13) по дифференциальным уравнениям (3.12).

#### 4. Оценка порядка малости безразмерных параметров

В систему уравнений (3.12) входит девять независимых безразмерных параметров

$$\tilde{M}, \tilde{k}_\alpha, \tilde{k}_{y\alpha}, \tilde{\omega}, \tilde{C}, \tilde{b}_x, \tilde{b}, \tilde{m}, p. \quad (4.1)$$

Оценка параметров  $\tilde{\omega}, \tilde{C}, \tilde{b}, \tilde{m}, p$  проведена в работе [2].

Случай  $p=1$ , как и для ротора с неподвижной точкой [2], является критическим. Последнее уравнение (3.12) при этом имеет, по крайней мере, один нулевой корень.

Параметр  $\tilde{M}$  эквивалентный 1, так как является отношением момента инерции и осевого момента инерции некоторого условного ротора. Параметры  $\tilde{k}_\alpha, \tilde{b}_x$  характеризуют силы сопротивления в системе и для реальных роторных машин эквивалентны 1. Параметр  $\tilde{k}_{y\alpha}$  может изменяться в пределах от  $-1$  до  $1$ . Для почти симметричных относительно начала координат точек  $R$  и  $L$  имеем  $\tilde{k}_{y\alpha} \sim 0$ .

Окончательно имеем такие соотношения малости для безразмерных параметров:

$$\tilde{\omega} \in (0, +\infty), \tilde{m} \ll 1, \tilde{M}, \tilde{C}, \tilde{k}_\alpha, \tilde{b}_x, \tilde{b} \sim 1, p \in [0, 1], \tilde{k}_{y\alpha} \in [-1; 1], (\tilde{k}_{y\alpha} \sim 0). \quad (4.2)$$

В дальнейшем при исследовании роторной системы на устойчивость будем считать, что между параметрами системы имеют место соотношения (4.2).

#### 5. Характеристическое уравнение

Преобразуем систему (3.12). Сначала от второго уравнения вычтем первое, а затем введем новую переменную  $\xi_{\theta z}$ :

$$\xi_{\theta z} = \xi_z + \tilde{M}\theta_z. \quad (5.1)$$

Получим

$$\begin{aligned} L_1 &= D^2 \xi_{\theta z} + \tilde{b}_x D \xi_{\theta z} + \xi_{\theta z} - \tilde{M} D^2 \theta_z - \tilde{M}(1 + \tilde{k}_{y\alpha})(\tilde{b}_x D \theta_z + \theta_z) + D^2 s_z = 0, \bar{L}_1 = 0, \\ L_2 &= -D^2 \xi_{\theta z} - (1 + \tilde{k}_{y\alpha})(\tilde{b}_x D \xi_{\theta z} + \xi_{\theta z}) + \\ &+ (1 + \tilde{M})D^2 \theta_z + (\tilde{k}_\alpha + \tilde{M}(1 + 2\tilde{k}_{y\alpha}))(\tilde{b}_x D \theta_z + \theta_z) - i\tilde{\omega}\tilde{C}D\theta_z = 0, \bar{L}_2 = 0, \\ L_3 &= s_z'' + \tilde{b}s_z' + \tilde{m}(D^2 \xi_{\theta z} - p\bar{D}^2 \bar{\xi}_{\theta z}) = 0, \bar{L}_3 = 0. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Характеристическое уравнение системы (5.2) имеет вид

$$\begin{vmatrix} a_1 + a_3 & 0 & \tilde{M}a_4 & 0 & a_1 & 0 \\ 0 & \bar{a}_1 + \bar{a}_3 & 0 & \tilde{M}\bar{a}_4 & 0 & \bar{a}_1 \\ a_4 & 0 & a_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{a}_4 & 0 & \bar{a}_5 & 0 & 0 \\ \tilde{m}a_1 & -\tilde{m}p\bar{a}_1 & 0 & 0 & \lambda^2 + \tilde{b}\lambda & 0 \\ -\tilde{m}pa_1 & \tilde{m}\bar{a}_1 & 0 & 0 & 0 & \lambda^2 + \tilde{b}\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (5.3)$$

где  $a_1 = \lambda^2 + 2i\tilde{\omega}\lambda - \tilde{\omega}^2$ ,  $a_2 = \lambda + \tilde{\omega}i$ ,  $a_3 = \tilde{b}_x a_2 + 1$ ,

$$a_4 = -[a_1 + (1 + \tilde{k}_{y\alpha})a_3], a_5 = (1 + \tilde{M})a_1 - \tilde{C}\tilde{\omega}ia_2 + [\tilde{M}(1 + 2\tilde{k}_{y\alpha}) + \tilde{k}_\alpha]a_3. \quad (5.4)$$

Раскрыв определитель (5.3) получим

$$\begin{aligned} & \lambda^2 (\lambda + \tilde{b})^2 [(a_1 + a_3)a_5 - \tilde{M}a_4^2][(\bar{a}_1 + \bar{a}_3)\bar{a}_5 - \tilde{M}\bar{a}_4^2] - \\ & - \tilde{m}\lambda(\lambda + \tilde{b})[\bar{a}_1^2\bar{a}_5((a_1 + a_3)a_5 - \tilde{M}a_4^2) + a_1^2a_5((\bar{a}_1 + \bar{a}_3)\bar{a}_5 - \tilde{M}\bar{a}_4^2)] + \\ & + \tilde{m}^2 a_1^2 a_5 \bar{a}_1^2 \bar{a}_5 (1 - p^2) = 0 \end{aligned} \quad (5.5)$$

или

$$X\bar{X} - \tilde{m}(X\bar{Y} + \bar{X}Y) + \tilde{m}^2(1 - p^2)Y\bar{Y} = 0$$

или

$$(X - \tilde{m}Y)(\bar{X} - \tilde{m}\bar{Y}) - \tilde{m}^2 p^2 Y\bar{Y} = 0, \quad (5.6)$$

где

$$X = \lambda(\lambda + \tilde{b})[(a_1 + a_3)a_5 - \tilde{M}a_4^2], \quad Y = a_1^2 a_5. \quad (5.7)$$

Уравнение (5.6) является полиномом 12-ой степени относительно  $\lambda$  с действительными коэффициентами. Для устойчивости основных движений достаточно, что бы действительные части всех корней характеристического уравнения были отрицательными [3]. В общем случае найти его корни в аналитическом виде невозможно, как и невозможно применить к этому полиному критерий Рауса-Гурвица. Поэтому актуально получить разложения этих корней по степеням малого параметра  $\tilde{m}$  [4] и по разложениям сделать заключение об устойчивости основных движений.

### Выводы

1) устойчивость основных движений ротора описывается системой (3.12) состоящей с трех пар комплексно-сопряженных обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка с постоянными коэффициентами, которые содержат 9 независимых безразмерных параметров (4.1);

2) для параметров имеют место соотношения (4.2).

3) для исследования устойчивости необходимо оценить действительные части 12-ти корней уравнения (5.6).

**Список литературы:** 1. *Філімоніхін Г.Б.* Методика складання диференціальних рівнянь руху роторних систем з автобалансирами і її застосування до системи ротор – масивний корпус - автобалансир / *Філімоніхін Г.Б., Гончаров В.В.* // Збірник наукових праць КНТУ, 2009, Вип. 22, С. 357–363. 2. *Філімоніхін Г.Б.* Безрозмірні диференціальні рівняння, що описують стійкість основного руху системи, складеної з незрівноваженого ротора з нерухомою точкою, корпуса і автобалансира / *Г.Б.Філімоніхін, В.В.Гончаров, І.І.Філімоніхіна* // “Східно-європейський журнал передових технологій”, 2011, Вип. 1/3 (49), С. 40–44. 3. *Меркин Д.Р.* Введение в теорию устойчивости движения. / *Д.Р.Меркин.* – М.: Наука, 1971. - 312 с. 4. *Найфэ А.* Введение в методы возмущений: Пер. с англ. / *А. Найфэ.* – М.: Мир, 1984. – 535 с.

Поступила в редколлегию 15.06.2012

### УДК 629.7.036.5

**Ю.А.МИТИКОВ**, канд. техн. наук, доц., зав. каф., ДНУ, Днепропетровск,  
**С.А. КУДА**, нач. сект. проектно-констр. отд., ГП «КБ «Южное»  
 им. М.К. Янгеля», Днепропетровск

### ОПТИМИЗАЦИЯ СКОРОСТИ ВВОДА ГОРЯЧЕГО ГЕЛИЯ В БАК С КИСЛОРОДОМ

Для баків великого подовження виявлено діапазон часу роботи рухової установки, коли доцільно оптимізувати швидкість введення гарячого газу наддування. Одержаний критерій, що